TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral II
2º Teste (Versão A)

LEIC-T, LETI, LEE, LEGI

11 de Junho de 2018

Justifique adequadamente todas as respostas.

(4) 1. Considere o subconjunto M de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$\begin{cases} x^2 + y^4 = 1 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

a) Justifique que M é uma variedade diferenciável e indique a sua dimensão.

b) Determine o espaço normal e o espaço tangente a M no ponto $(x, y, z) = (1, 0, \sqrt{3})$.

(4) 2. Seja $B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2, y \geq 0, x^2 - y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 9\right\}$. Use as coordenadas definidas por

$$\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - y^2 \end{cases}$$

para calcular

$$\iint_B (x^2 + y^2)xy \, dx \, dy.$$

(4) 3. Calcule

$$\iiint_A x \, dx \, dy \, dz$$

em que $A = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 0 \leq x \leq y, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$.

(3) 4. Calcule o integral de linha

$$\int_L 2xy \, dx + (x^2 - y^2) \, dy$$

em que L é uma linha de classe C^1 unindo um ponto da recta $y = \sqrt{3}x$ a um ponto da recta $y = -\sqrt{3}x$.

(3) 5. Seja h uma função definida em $\mathbb{R}^2$ com valores reais não negativos e de classe C^1.
Considere a região U definida por

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\},$$

a superfície S definida por

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = h(x, y), x^2 + y^2 \leq 1\},$$

e o campo vectorial $G : U \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$G(x, y, z) = (-xy, x^2, yz).$$

Aplique o teorema da divergência a G em U para mostrar que o fluxo $\iint_S G \cdot \nu \, dS$, com ν uma normal unitária contínua sobre S num sentido por si arbitrado, não depende de h.

(2) 6. Seja $H : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $H(x, y, z) = (y^2, xy, -xz)$.

a) Determine um campo $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\operatorname{rot} F = H$.

b) Seja L uma linha fechada de classe C^1 no plano $x - y = 0$. Calcule o integral de linha $\oint_L F \cdot dr$.