TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral II
2º Teste (Versão A)

LEIC-T, LETI, LEE, LEGI

7 de Junho de 2019

Justifique adequadamente todas as respostas.

(3) 1. Considere o sistema

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ z^2 - x^2 + \operatorname{sen}(yz) - 4y^2 = 0. \end{cases}$$

a) Mostre que o sistema define (x, y) como uma função C^1 de z numa vizinhança de $(x, y, z) = (1, 0, 1)$.

b) Calcule $\frac{dx}{dz}(1)$.

(4) 2. Calcule, usando uma mudança de variáveis apropriada,

$$\iiint_V x\, dx\, dy\, dz$$

em que $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 4, 1 \leq x^2 + y^2, 0 \leq x \leq y\}$.

(4) 3. Seja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -(x - 1) \leq y \leq -2(x - 1), x + 1 \leq y \leq 2(x + 1)\}$. Aplique a mudança de variável

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x-1} \\ v = \frac{y}{x+1} \end{cases}$$

para calcular o integral

$$\iint_B \frac{y^2}{(x - 1)^2 (x + 1)^3}\, dx\, dy.$$

(4) 4. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $F(x, y, z) = (yz, xz, xy + z)$.

a) Decida se F é ou não um campo conservativo em $\mathbb{R}^3$.

b) Calcule $\int_L F \cdot dr$ em que L é a linha descrita parametricamente por $r(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 1 + t^2)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(3) 5. Calcule a área da superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2} \leq z = \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$.

(2) 6. Mostre que, se $G : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \to \mathbb{R}^3$ é um campo de classe $C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\})$ tal que

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (x^2 + y^2 + z^2)\|G(x, y, z)\| = 0,$$
$$\operatorname{div} G = 0 \text{ em } \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\},$$

então, sendo ν a normal unitária exterior a $B_1(0, 0, 0)$,

$$\iint_{\partial B_1(0,0,0)} G \cdot \nu\, dS = 0.$$